ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

5ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Αν A είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι συμπαγές και ανοικτό, τι συμπεραίνετε για το A;

2) Έστω X ένας μετρικός χώρος, E ένα συνεκτικό υποσύνολο του X και A, B δυο μη κενά ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X ώστε $X = A \cup B$. Να δειχθεί ότι $E \subseteq A$ ή $E \subseteq B$.

3) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και E είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του X που περιέχει δύο τουλάχιστον σημεία να δειχθεί ότι το E είναι υπεραριθμήσιμο (και μάλιστά έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο ή ίσο του συνεχούς). [Υπόδειξη: Αν a, β είναι δυο διαφορετικά σημεία του E, θεωρήστε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \rho(x, a)$ και κατάλληλο πεδίο ορισμού.]

4) Έστω (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $(C_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X ώστε για κάθε $i, j \in I$ να ισχύει $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\bigcup_{i \in I} C_i$ είναι συνεκτικό.

5) Να δοθεί παράδειγμα ενός συνεκτικού συνόλου E σε ένα μετρικό χώρο X, ώστε το εσωτερικό του K^o να μην είναι συνεκτικό. [Υπόδειξη: Μπορεί να γίνει στον $\mathbb{R}^2$.]

6) Να δοθούν υποσύνολα A, B, Γ, Δ του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:
α) A συμπαγές και συνεκτικό.
β) B συμπαγές μη συνεκτικό με $\mathrm{diam}(B) = 2$ και $\mathrm{diam}(B^o) = 1$.
γ) Γ μη συμπαγές και συνεκτικό.
δ) Δ μη συμπαγές μη συνεκτικό με $\mathrm{diam}(\Delta) = 2$ και $\mathrm{diam}(\Delta^o) = 1$.

7) Συμβολίζοντας με ρ την ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^2$, να βρείτε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\rho\Big((0,0), A\Big) = 1$ και $\rho\Big((0,0), A^o\Big) = 2$.

8) Έστω (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και E ένα υποσύνολο του X. Να δειχθεί ότι το E είναι μη συνεκτικό αν και μόνο αν υπάρχουν δύο μη κενά υποσύνολα Γ, Δ του X ώστε να ισχύουν $E = \Gamma \cup \Delta$, $\Gamma \cap \overline{\Delta} = \emptyset$ και $\overline{\Gamma} \cap \Delta = \emptyset$.